

キャップの回転に伴う歳差運動の解析

宮城県仙台第三高等学校 理数科

要旨

本研究では円柱状のキャップを回転させたときの動きを観察した。キャップは回転している物体が回転軸で円を描くように振れ、倒れずに回転を続ける歳差運動と自転運動をしていた。この歳差運動はコマのような従来の歳差運動とは異なり、速度が落ち続けるまで運動を続けていた。本研究を進めていく上で、キャップの自転運動と歳差運動の速度を比較することで摩擦力の向きが変化することがわかった。その摩擦力の向きが角運動量ベクトルの向きに影響し、それによりキャップが立ち上がる動きをするか倒れようとする動きをするかが変わる事がわかったため、キャップの自転運動と歳差運動を比較することで立ち上がるか倒れるかを調査した。

1 序論

歳差運動は回転している物体が回転軸で円を描くように振れ、倒れずに回転を続ける運動のことを指す。そのため、回転しているキャップも近い挙動をしているためキャップは歳差運動をしていると思われる。キャップの歳差運動はコマが行うような歳差運動とは異なっている部分がある。コマの歳差運動は回転量が落ちると直立が維持できなくなり、倒れる直前のみ歳差運動が起こった。しかし、キャップの歳差運動は終始同じように回転を続け、速度が落ちてキャップが倒れるまで歳差運動が続いた。そのため、従来の歳差運動とは異なる運動をしていることがわかった。

自転運動と歳差運動では地面から受ける摩擦力の向きが逆向きであり(図1)キャップが地面からどのように摩擦力を受けるかはキャップの自転運動と歳差運動のどちらが速いかによって変化すると考えた。また、摩擦力はキャップの角運動量ベクトルに影響するため、角運動量ベクトルの向きによってキャップが立ち上がる動きをするか倒れようとする動きをするかが変化する。

自転運動と歳差運動の関係性を文字(表1)を使い表すと次のように表せる。

① 歳差運動では、重力による影響は首振りになる

$$l \cos \theta \times m g \times \Delta t = L \cos \theta \times \Delta \Phi$$

② $\Delta \Phi = \omega \times \Delta t$ 、 $L = I \times \lambda$ より、 ω について整理する

$$\omega = (l \times m g) / L = (l \times m g) / I \times \lambda$$

③ 歳差運動が地面と擦れる速度 $l \cos \theta \times \omega$ に②を代入し、

$$(l^2 \times m g \times \cos \theta) / I \times \lambda$$

④ 自転が地面と擦れる速度は

$$r \times \lambda$$

このことから歳差と自転が地面と擦れる速度は $(l^2 \times m g \times \cos \theta) / I \times \lambda$ 、 $r \times \lambda$ と考えられる。このとき地面と擦れる速度に自転の角速度 λ が共通の要素として含まれている。そのため x 軸に自転の角速度を、 y 軸に地面と擦れる速度を取ると、歳差運動の速度は $(l^2 \times m g \times \cos \theta) / I$ を係数に持つ反比例、自転は r を係数に持つ比例のグラフとなる事がわかる(図2)。これらのグラフには必ず交点が存在し、その交点を境にグラフの上下関係が入れ替わり、キャップが立ち上がろうとするか、寝ようとするか変わると推測し、「キャップ自転の方が速いときキャップは立ち上がろうとし、歳差運動の方が速いときキャップは倒れようとする。」という仮説を立て実験を行った。

2 実験と結果、考察①

実験に用いたキャップは内径 8mm、直径 10mm、長さ 50mm の中空円柱形である。

そのキャップに赤色の線を引き、手で力を与え回転させその様子を動画を撮影した。そして、歳差運動が一回転する間にキャップが何回転するのかを数え、キャップの回転速度と歳差運動の速度を計算した。

結果として、歳差運動が一回転するまでにキャップがちょうど四回転することが観察できた。また、キャップの直径は 1.0cm であるため円周は πcm となり歳差運動の円周の長さは観察より $4.28\pi\text{cm}$ となった。このとき両者の回転した時間は一致するため、歳差運動の回転のほうがキャップの回転よりも速いことがわかり、キャップは地面に倒れようとする動きをした。そのためキャップが倒れる場合において私の仮説は正しいと判断できる。

4 実験と結果、考察②

キャップにより強い力を与えて歳差運動よりも速くキャップを回転させるために、タコ糸をキャップの周りに巻き付け、それを引っ張ることで回転させた（図 3）。するとキャップは勢いよく立ち上がり、跳ね上がる挙動を繰り返した。キャップが立ち上がる動きをすることは仮説通りの挙動であったが、キャップが跳ねる挙動を取ったのは私のキャップの自転の方が速いケースにおいてキャップはゆっくりと立ち上がるという予想に反する結果になった。

5 今後の展望

回転速度を速めキャップを立ち上がらせることができたが、歳差運動の速度の方が速くキャップが倒れた際の挙動とは異なり、ゆっくりとは立ち上がらず跳ね上がるうごきをしたことに疑問を持ったため、なぜこのような挙動をしたのかを解明したいと考えた。

参考文献

広島大学大学院理学研究科化学専攻 教授
山崎勝義 歳差運動の物理学

https://home.hiroshima-u.ac.jp/kyam/pages/results/monograph/Ref05_precess.pdf

物理のかぎしっぽ 剛体ってなんだろう？（Joh 著）

<https://hooktail.sub.jp/mechanics/rigidBody/>

図 1

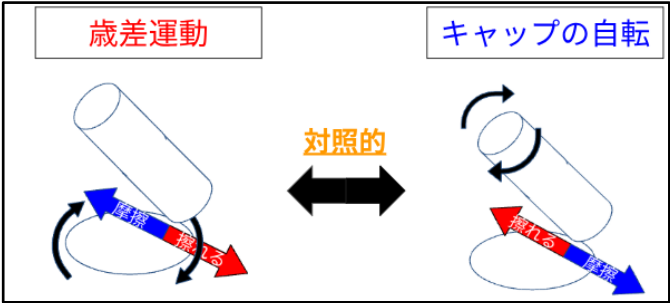
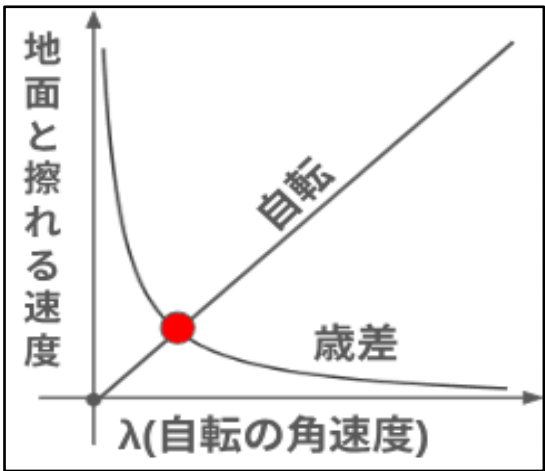


表 1

λ	自転の角速度
ω	歳差の角速度
$\Delta\Phi$	Δt における ω の時間変化
m	キャップの質量
g	重力加速度
L	角運動量ベクトルの大きさ
h	キャップの半径
ℓ	キャップの中心から接地点までの距離
I	キャップの慣性モーメント

図 2



☒ 3

